Guía de Laboratorio N^0 0

FIS-1513 Estática y Dinámica	Análisis de Errores

Objetivos

- Aprender acerca de las diferentes fuentes de error que pueden existir en un experimento.
- Mostrar cómo cuantificar los errores en una medición.
- Ilustrar el uso de barras de error en gráficos de datos.

1. Introducción

Dada la incertidumbre inherente a toda medición experimental, existe siempre un error asociado a ellas. Por lo tanto, en el contexto de un experimento no sólo es importante que obtengamos un resultado para una determinada medición, sino que también debemos especificar cuál es el error correspondiente. Este último usualmente lo escribimos usando el símbolo ± que nos dice en qué intervalo es probable que se encuentre el resultado "verdadero". Por ejemplo, un determinado experimento nos puede decir que la aceleración de gravedad en la superficie de la Tierra es 9.7±0.2 m/s^2. Esto quiere decir que la mejor estimación para la medición es 9.7 m/s^2 y que es muy poco probable que el resultado verdadero sea mayor que 9.9 m/s^2 o menor que 9.5 m/s^2.

La inhabilidad de hacer un análisis de error adecuado puede llevarnos a sacar conclusiones completamente erradas a partir de nuestros resultados.

2. Campana de Gauss y error estadístico

Existen muchas mediciones para las cuales existen factores aleatorios asociados, por lo que los resultados de mediciones sucesivas no serán necesariamente idénticos y estarán distribuidos en torno a un determinado valor. Por ejemplo, tomemos las mediciones de la altura de un grupo de 928 personas realizadas por Galton en Inglaterra en 1886 (ver fig. 2.1). Las barras de la figura nos muestran la cantidad de personas cuya altura se encuentra en cada intervalo de una pulgada. En muchos casos, incluyendo el de las mediciones de Galton, es adecuado considerar que la distribución de los datos es aproximadamente ***normal*** (o "Gaussiana").

Es decir, si tuviéramos un número muy grande de mediciones (personas en este caso) y pudiéramos entonces agruparlos en intervalos cada vez más pequeños (por ejemplo 0,1 pulgadas), veríamos que la curva descrita por las

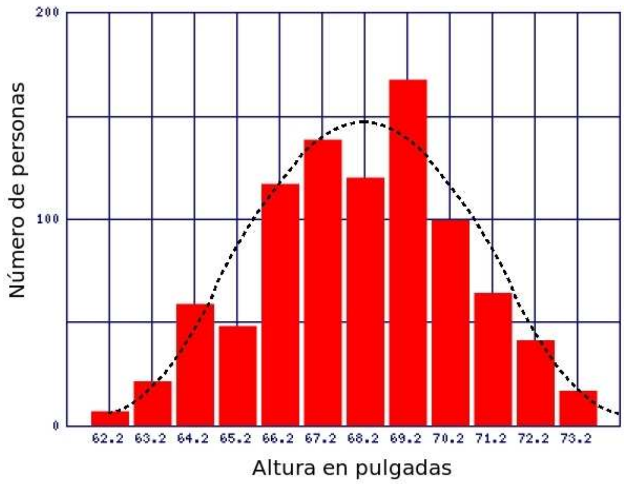


Figura 2.1: La altura de las barras indican el número de personas cuya estatura se encuentra en el correspondiente intervalo de una pulgada.

barras se asemejaría cada vez más a una curva como la línea punteada que se muestra en la figura 2.1. Esta curva es descrita por la ecuación:

$$N(x) = A\ e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}},$$

donde $\bar{x}$ es el **valor medio** de la medición y σ es la **desviación estándar**. Esta función nos dice que los resultados de una medición estarán distribuidos en torno a un determinado valor medio con una dispersión dada por la desviación estándar (ver fig. 2.2). Más precisamente, se puede demostrar que el 68% de los resultados de la medición, o equivalentemente el 68% del área bajo la curva $N(x)$ estarán entre $\bar{x}+\sigma$ y $\bar{x}-\sigma$. De manera similar, un 95% de los resultados estarán entre $\bar{x}+2\sigma$ y $\bar{x}-2\sigma$.

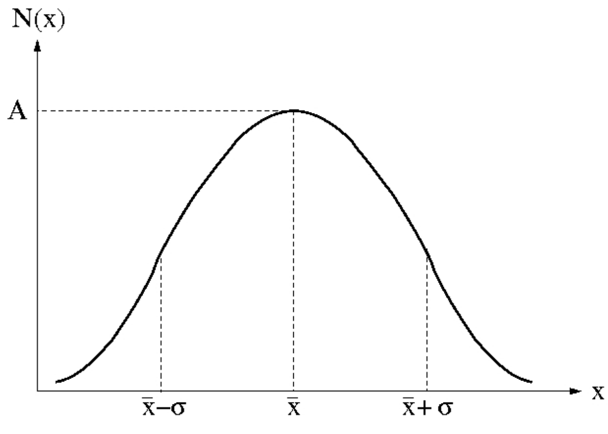


Figura 2.2: Curva correspondiente a una distribución normal. A ésta a veces se le llama campana de Gauss.

Por ejemplo la afirmación vista anteriormente que la aceleración de gravedad es 9.7±0.2 m/s^2 significa que la desviación estándar es 0.2 m/s^2, es decir, podemos afirmar con un 68% de probabilidad que el valor verdadero está entre 9.5 m/s^2 y 9.9 m/s^2.

Al hacer una cantidad finita de mediciones, obviamente será difícil que un gráfico de barras de nuestros datos asemeje de manera precisa una curva Gaussiana. Sin embargo, se sabe que dado un conjunto de datos (ó mediciones) las mejores ***estimaciones*** para el valor medio y desviación estándar están dados por

$$\overline{x}_{est} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \text{y,} \qquad \sigma_{est} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}_{est})^2} \, ,$$

donde *"est"* indica que son los valores *estimados*.

Debemos enfatizar que estos no son los valores verdaderos de la media y la desviación estándar, sino que sólo una aproximación que se vuelve mejor cuanto más grande es N.

Una conclusión importante es que **la desviación estándar es el error en cada medición individual**, es decir,

$$\Delta x_i = \sigma \, .$$

A esto se le llama ***error estadístico***. Veremos otros tipos de error más adelante.

Se puede demostrar además que el error en la estimación de la desviación estándar está dado por

$$\Delta\sigma_{est} = \frac{\sigma_{est}}{\sqrt{2N-2}} \, .$$

Dado que σ_{est} es el error estimado para la medición, $\Delta\sigma_{est}$ es algo así como el error en el error.

Ejercicio 2.1: Un senador que vive en Santiago viaja muy seguido al Congreso en Valparaíso. Para tener una estimación de la demora en su viaje, mide varias veces el tiempo que se demora desde que sale de su casa hasta que llega al Congreso. Los tiempos en minutos son los siguientes:

t (min.)	85	81	74	79	80	93	82	70	81

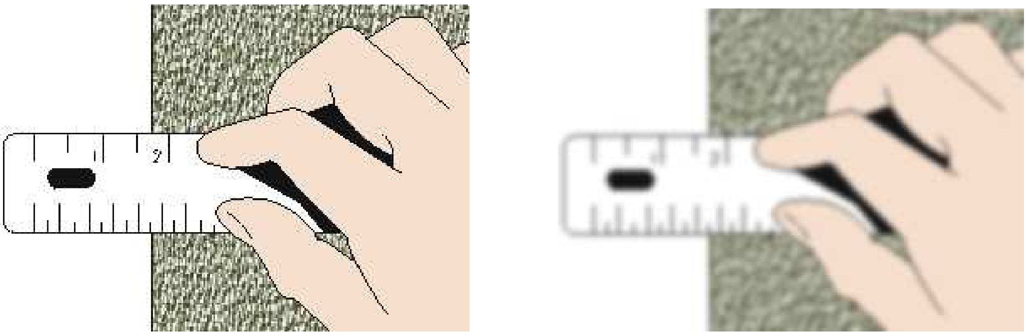
Obtenga la estimación del tiempo medio que demora el viaje. ¿Con cuánta anticipación a una determinada sesión deberá partir de Santiago si quiere llegar a tiempo aproximadamente un 85% de las veces? ¿Cuál es el error en su estimación del error?

---

3. Error de lectura

Al hacer una medición con un instrumento, por ejemplo, con una regla (que vamos a suponer perfecta por ahora) debemos preguntarnos con qué exactitud somos capaces de leer el resultado. Es decir, debemos responder la pregunta: ***¿Cuál es el valor mínimo y máximo que la posición verdadera puede tener sin que nosotros podamos ver la diferencia?*** Para responderla adecuadamente debemos usar nuestra intuición y sentido común.

Tomemos por ejemplo la medición de la posición del lado izquierdo de un objeto que se está realizando en la figura 3.1a. Podemos ver que la posición está ubicada un poco más abajo de 1,75 cm. Pero, ¿estará debajo de 1,70? Poco probable. Quizás una buena aproximación es que el resultado no está debajo de 1.72 cm pero tampoco sobre 1.76 cm. Podemos decir entonces que nuestro resultado tiene un error de 0,02 cm y que la posición es 1.74 ± 0.02 cm. Si por alguna razón tenemos problemas de visión y vemos la regla como se muestra en la figura 3.1b podemos ver que el resultado está muy cerca de 1.75 cm. Sin embargo, ahora un análisis similar al anterior nos dirá que es mejor asociar un mayor error de lectura y que un resultado razonable es 1.75 ± 0.05 cm.



(a) (b)

Figura 3.1: Las imagenes muestran la medición de la posición de la orilla de una mesa efectuada con una regla. (a) La imagen más clara permite un menor error de lectura. (b) La imagen borrosa nos obliga a asignar un mayor error a la lectura.

De manera similar a lo visto para la desviación estándar, el error de medición nos da una idea de la dispersión para mediciones sucesivas hechas bajo las mismas condiciones, pero hechas por distintas personas, las cuales pueden juzgar de manera diferente el resultado que leen en el instrumento (analógico). Como no es práctico tener a muchas personas haciendo la misma medición, al hacerla debemos adivinar un intervalo apropiado en el cual creemos que estarán la mayoría de estas mediciones. Al hacer esto debemos tener cuidado con no sobreestimar el error para no restar innecesariamente valor a nuestra medición.

En el caso de un instrumento digital el error de lectura asociado será siempre la mitad de la potencia de diez representada por el último dígito. Por ejemplo, en la balanza de la figura 3.2 la masa medida para una moneda de quinientos pesos es 6.5±0.05 g.

Muchas veces uno puede escuchar que el error de lectura asociado a un instrumento analógico es la mitad de su marca de división más pequeña. **ESTO NO ES CORRECTO**. El error de lectura solo puede ser determinado por la persona que realiza la medición e incluso puede variar de persona a persona. (Por ejemplo, alguien que ve borroso deberá asignar un error mayor que alguien que ve con claridad.)

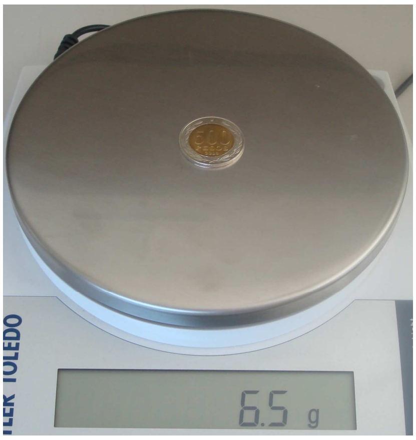


Figura 3.2: El lector de la balanza digital nos muestra una medición para el peso de una moneda de quinientos pesos. El error de lectura asociado deberá ser la mitad del valor de la última potencia de diez desplegada, es decir, 0.05 g.

4. Precisión

Tanto el error estadístico como el de lectura son indicadores de qué tan dispersos estarán los datos de sucesivas mediciones. Ambos describen entonces la ***precisión*** de la medición. En ciencia precisión *no* es lo mismo que exactitud. La diferencia la detallaremos más adelante.

De cualquier forma tenemos dos cantidades que nos dicen cual es el error de la medición. Entonces, ¿cuál es **el** error? La respuesta es: ambos. Afortunadamente casi siempre uno de ellos es significativamente más grande que el otro. El más grande es el que tomamos entonces como el error.

Notemos que repeticiones en la medición son entonces necesarias sólo cuando pensamos que la desviación estándar será mayor que el error de lectura.

Por ejemplo, si vamos a medir la masa de un objeto usando una balanza es poco probable que repeticiones en la medición arrojen valores diferentes. En este caso entonces el error de precisión a considerar será el de lectura y no será necesario repetir el procedimiento. En cambio, si se mide el tiempo de caída libre de una pelota desde el techo de una casa contando sólo con un cronómetro, es muy probable que mediciones sucesivas presenten diferencias considerables entre sí. En este caso, es recomendable repetir la medición varias veces.

5. Cifras significativas

El concepto de cifra significativa en el análisis de errores involucra consideraciones de tipo matemático y de tipo físico. En general estamos interesados en extraer un concepto físico (experimental) de una cifra numérica. Por ejemplo, supongamos que luego de realizar medición de cierta cantidad Z obtenemos una muestra de nueve puntos (N=9) y que al calcular el valor medio y la desviación estándar de la misma el resultado numérico (el obtenido por la calculadora) sea Z=5.36272146$\pm$0.26765413. Supongamos además, como usualmente ocurre, que la desviación estándar obtenida es mayor que el error de lectura del instrumento utilizado en la medición, es decir, la desviación estándar en este caso es el error en el valor de cada medida.

Si calculamos el error en la estimación de la desviación estándar (ver sección 2) para esta muestra obtenemos: $\Delta\sigma_{\mathrm{est}}$=0.06691353, esto es, 25% del valor de la desviación estándar estimada $\sigma_{\mathrm{est}} = 0.26765413$.

Estos números nos indican que el valor “verdadero” de la desviación estándar probablemente se encuentre entre 0.33456766 y 0.2007406, esto es, claramente gran parte de los números en la estimación de la desviación estándar carecen de significado. De hecho, el valor de esta podría ser $\sigma_{\mathrm{est}} = 0.27 \pm 0.07$ o incluso $\sigma_{\mathrm{est}} = 0.3 \pm 0.1$.

Para resolver esta ambigüedad examinemos la ecuación para $\Delta\sigma_{\mathrm{est}}$:

$$\Delta\sigma_{\mathrm{est}} = \frac{\sigma_{\mathrm{est}}}{\sqrt{2\mathrm{N}-2}}.$$

Para disminuir el error en la desviación estándar estaríamos tentados a aumentar el número de mediciones (N). Suponiendo entonces que N=50, el error en la desviación estándar será aproximadamente 10 %, en otras palabras, para un número elevado de mediciones la desviación estándar estimada tendrá al menos dos dígitos que poseen algún significado experimental.

Volviendo a nuestro ejemplo, si tomamos la desviación estándar estimada como 0.27, Z=5.36$\pm$0.27, es decir, en este caso es incorrecto reportar como valor experimental Z=5.363$\pm$0.27 pues el digito “3” carece de significado. Esto es, *el error en una cantidad define cuantas cifras son significativas*.

En el caso en que el error de lectura sea mayor que la desviación estándar estimada, el primero será el error en cada una de las mediciones experimentales y es poco probable (al menos para personas “normales”) que este tenga más de una cifra significativa.

Apoyándonos en los ejemplos anteriores podemos enunciar la siguiente “regla” para las cifras significativas:

En casos simples los errores se especifican con una o dos cifras significativas.

En este punto podemos definir entonces el concepto de *cifra significativa como aquella que aporta información no ambigua acerca de una determinada medida experimental*.

Ejercicio 5.1: Escriba las siguientes cantidades con el número correcto de cifras significativas.

a) 3.536$\pm$1.2684

b) 9$\pm$3.652

c) 5.378$\pm$0.02356

La definición anterior nos conduce a las siguientes reglas de cómputo para las cifras significativas:

- Los ceros únicamente son significativos cuando se encuentran entre dos cifras diferentes de cero. (203, tres cifras; 230, dos cifras).
- Los ceros a la izquierda de una cifra diferente de cero no son significativos ya que únicamente indican la posición del punto decimal y pueden ser anulados mediante un cambio de unidades. (0.0023 m, dos cifras; 2.3 mm, dos cifras).
- Los ceros a la derecha de cifras no nulas pueden o no ser significativos, dependiendo de la incertidumbre experimental (0.023000 g, dos cifras si la precisión experimental es de mg; cinco cifras significativas si la precisión experimental es de μg).

Notemos que en el caso en que estemos trabajando con equipos de alta precisión (como los utilizados en los centros de metrología) lógicamente el número de cifras significativas será mayor que dos. Por ejemplo, el valor de la carga del electrón reportado por el NIST es e=1.602 176 487 x 10^{-19} $\pm$0.000 000 040 x 10^{-19} C.

6. Propagación de errores de precisión

Frecuentemente combinaremos aritméticamente algunas cantidades medidas para obtener algún resultado. Por ejemplo, una distancia dividida por un intervalo de tiempo para obtener velocidad. En esta sección veremos como estimar el error de la cantidad resultante.

Vamos a suponer que tenemos dos cantidades X e Y medidas directamente y de manera independiente, cuyos errores son ΔX y ΔY respectivamente. Supondremos además que en ambos casos el error es pequeño comparado con el valor medido, es decir, el error fraccional ($\Delta X / X$) es mucho menor que uno.

Existen tres reglas simples que abarcan la mayoría de los casos con los que nos encontraremos.

Regla 1: Si $Z = X \pm Y$ entonces,

$$\Delta Z = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} \ .$$

Se puede generalizar este resultado para n variables sumadas. Es decir, si $Z = X_1 \pm X_2 \pm \cdots \pm X_n$, entonces,

$$\Delta Z = \sqrt{\Delta X_1^2 + \Delta X_2^2 + \cdots \Delta X_n^2} \ .$$

Regla 2: Si $Z = X * Y$ ó $Z = X / Y$ entonces,

$$\Delta Z = Z\sqrt{\left(\frac{\Delta X}{X}\right)^2 + \left(\frac{\Delta Y}{Y}\right)^2} \ .$$

Regla 3: Si $Z = X^n$ entonces,

$$\Delta Z = nX^{n-1}\Delta X = Z\frac{n\Delta X}{X} \ .$$

Ejercicio 6.1: Se mide la velocidad de un auto de manera indirecta usando una medición de una determinada distancia recorrida *D* y el tiempo *t* que se demora en recorrerla. Las mediciones arrojan los siguientes resultados: *D*=11±0.01 m y t=0.7±0.1 s. ¿Cuál es el error Δv en la velocidad? Suponiendo que es muy difícil aumentar la precisión en la medición del tiempo, ¿tendría sentido aumentar la precisión en la medición de la distancia?

Ejercicio 6.2: Demuestre que el error en la media estimada a partir de N datos es $\Delta\overline{X}_{est} = \Delta X / \sqrt{N}$.

Método general: Si $Z = f(X_1, X_2, ..., X_n)$ entonces,

$$\Delta Z = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f(\vec{X})}{\partial X_i} \Delta X_i \right)^2} .$$

Ejercicio 6.3: Demuestre las Reglas 1, 2 y 3 a partir del método general.

Ejercicio 6.4: Si el error en la medición de X es ΔX, calcule ΔZ para $Z = \sin(X)$.

7. Exactitud y errores sistemáticos

Hasta ahora sólo hemos hablado de errores de precisión. En esta sección nos referiremos a los errores de exactitud.

Por ejemplo, imaginemos que estamos midiendo el tiempo con un péndulo de alta precisión (*i.e.* con muy poco roce). Efectuamos entonces mediciones repetidas y calculamos su valor medio y error de precisión usando las técnicas descritas anteriormente. Sin embargo, si el peso del péndulo se encuentra en la posición incorrecta, los resultados estarán *sistemáticamente* sobre o bajo el resultado verdadero. Esto es un error de exactitud y se le denomina ***error sistemático***.

Notemos que, contrario al error de precisión, el número de mediciones realizadas no contribuye a reducir un error de exactitud.

En un determinado experimento dominará el error de exactitud ó el de precisión y se ignora el menor entre ambos.

8. Análisis gráfico

Para analizar los datos obtenidos en un experimento muchas veces es útil usar gráficos.

Cuando dibujamos un punto en el grafico proveniente de alguna(s) medición(es) siempre debemos recordar que existe un error asociado a este. Para esto se utilizan ***barras de error*** como la que se muestra en la figura 8.1. Obviamente, es aceptable no incluir barras de error cuando estas son más pequeñas que el punto mismo en el gráfico.

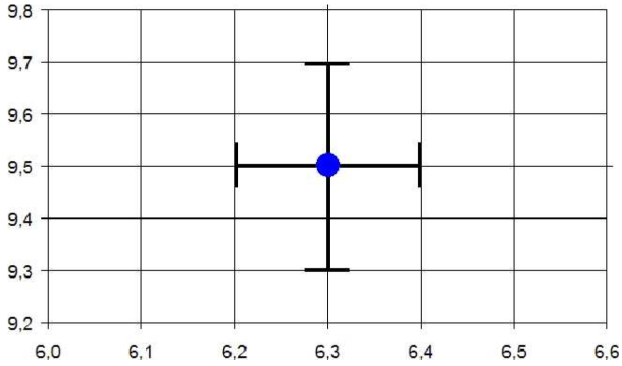


Figura 8.1: El punto de la figura corresponde al dato (x,y)=(6.3±0.1, 9.5±0.2). Las barras de error sirven para ilustrar la magnitud del error asociado a cada punto en el gráfico.

A veces es útil usar el gráfico resultante para estimar el error en una cantidad que no fue medida directamente. Por ejemplo, podemos medir la posición de un carro que se mueve a velocidad constante en distintos instantes de tiempo. Supongamos que nuestros relojes son muy exactos y la medición de tiempo altamente precisa de manera que podemos despreciar el error en el tiempo. Por otra parte, supongamos que nuestro método para medir la posición no es tan bueno y existe un error asociado a cada medición expresado en las barras de error que se ven en la figura 8.2.

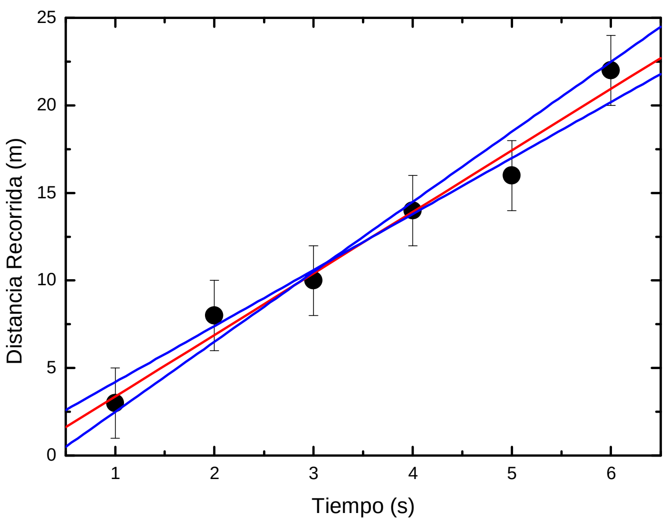


Figura 8.2: En un experimento se mide el desplazamiento para determinados intervalos de tiempo de un carro que se mueve a velocidad constante. La recta roja es la que mejor se ajusta a los datos y las azules son las de mayor y menor pendiente que todavía se ajustan a las barras de error.

Ahora, con una regla trazamos "al ojo" una recta que estimamos se ajusta mejor a los puntos de datos y barras de error (línea roja en la fig. 8.2). Otra vez "al ojo", dibujamos las rectas de mayor y menor pendiente que todavía se ajustan dentro de las barras de error (líneas en azul en la fig. 8.2). Calculando las pendientes de las tres rectas podemos concluir entonces que la velocidad medida es v=3.6 ± 0.4 m/s.

8. Experimento de práctica

Suponiendo que cuenta solamente con una regla graduada, diseñe un experimento simple para medir el tiempo de reacción de una persona. Tome como tamaño de su muestra N=10, encuentre el tiempo de reacción medio y la desviación estándar estimada.

Referencias

-La presente guía está basada en "*Error Análisis in Experimental Physical Science*" por David M. Harrison (http://www.upscale.utoronto.ca/PVB/Harrison/ErrorAnalysis/).